Aufgaben zum Comptoneffekt

1.Aufgabe: Welche Masse (als Vielfaches der Elektronenmasse) hat ein Quant, das zur Comptonwellenlänge λ_c gehört?

Lösung:

Für die Masse eines Quants gilt: $m_{Quant} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h \cdot c}{c^2 \cdot \lambda_C} = \frac{h}{c \cdot \lambda_C} = \frac{h \cdot m_e \cdot c}{c \cdot h} = m_e$

Das Quant, das zur Comptonwellenlänge gehört, hat die Ruhemasse eines Elektrons.

2.Aufgabe: Berechnen Sie die Wellenlängezunahme bei Comptonstreuung für die Ablenkwinkel des Photons ($\beta = 45^o, 90^o, 135^o, 180^0$).

Lösung:

45^0: $\Delta\lambda = 7{,}099 \cdot 10^{-13}$ m
90^0: $\Delta\lambda = 2{,}424 \cdot 10^{-12}$ m $= \lambda_C$
135^0: $\Delta\lambda = 4{,}138 \cdot 10^{-12}$ m
180^0: $\Delta\lambda = 4{,}848 \cdot 10^{-12}$ m $= 2 \cdot \lambda_C$

3.Aufgabe: Wie viel Prozent der Ausgangswellenlänge beträgt die Comptonverschiebung bei Röntgenstrahlen der Comptonwellenlänge, wie viel bei sichtbarem Licht (600 nm), wenn der Ablenkwinkel $\beta = 90^o$ beträgt? Könnte sichtbares Licht ein Graphitelektron freischlagen (Bindungsenergie ca. 5 eV)?

4.Aufgabe: Welche Spannung muss wenigstens an eine Röntgenröhre gelegt werden, um eine Strahlung zu erzeugen, deren Quanten gleich der Ruhemasseenergie von Elektronen sind?

5.Aufgabe: Welche Energie wurde bei einem Comptonprozess an die Elektronen abgegeben wenn die Frequenz der gestreuten Strahlung $0{,}990 \cdot 10^{19}$ Hz und die der ursprünglichen Strahlung 10^{19} Hz beträgt?

Lösung:

$W = h\,(f - f') = 414$ eV

6.Aufgabe: Die Frequenz der einfallenden Strahlung beträgt bei einem Comptonprozess $f = 1{,}2 \cdot 10^{20}$ Hz. Wie groß ist die Frequenz der gestreuten Strahlung, wenn die Geschwindigkeit der Elektronen nach dem Stoß $v = 1{,}5 \cdot 10^{8}$ m/s beträgt?

Lösung:

Die abgegebene Energie ist gleich der kinetischen Energie der Elektronen, die jedoch relativistisch zu berechnen ist.

$\Delta W = W_{kin} = W_{ges} - W_{ruh} =$

$$\Delta W = W_{kin} = W_{ges} - W_{ruh} = \frac{m_{0,e}\, c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_{0,e}\, c^2 = 0{,}15 \cdot m_{0,e} \cdot c^2 \;) = 7{,}9 \cdot 10^4\ eV$$

$$f' = \frac{h\, f - \Delta W}{h} = 1{,}01 \cdot 10^{20}\ Hz$$

7.Aufgabe: Bei Röntgenstrahlen der Wellenlänge 0,1 nm beobachtet man die Streustrahlung unter β=90°.
a) Wie groß ist ihre Wellenlänge?
b) Unter dem Streuwinkel von 120° erscheint eine Streulinie der Wellenlänge 4,848 pm. Wie groß ist die Wellenlänge der primären Röntgenstrahlung?
c) Die primäre Röntgenstrahlung habe die Wellenlänge 2,424 pm. Unter welchem Streuwinkel beobachtet man eine Streustrahlung der Wellenlänge 3,363 pm?

8.Aufgabe: Röntgenstrahlung der Wellenlänge 4,5 pm wird gestreut. Dabei erhalten die Elektronen die Energie $W_k = 1{,}6 \cdot 10^{-14}$ J.
a) Wie groß ist die Wellenlänge der Streustrahlung?
b) Wie groß ist der Ablenkungswinkel δ der gestreuten Röntgenquanten?

Lösung:

a)Energieerhaltungssatz: $W + W_e = W' + W'_e \Leftrightarrow W_k = W'_e - W_e = W - W'$

$$W_k = W - W' = h(f - f') = h\, c\, \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = \frac{W_k}{h\, c} = 14{,}15 \cdot 10^{10}\ \frac{1}{m}$$

b)Durch Umformen der Streuformel erhält man:

$$1 - \cos\delta = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_C} = \frac{(7 - 4{,}5)\cdot 10^{-12}\ m}{2{,}424 \cdot 10^{-12}\ m} 1{,}03 \Rightarrow$$

$$\cos\delta = 1 - 1{,}03 = -0{,}03 \Leftrightarrow \delta = 91{,}7^O$$

9.Aufgabe: Röntgenstrahlen der Wellenlänge 100 pm werden gestreut. Man beobachtet die Streustrahlung unter β = 90°.
a) Wie groß ist die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen?
b) Wie groß ist der Winkel α der Elektronenbahn mit der Richtung der ungestreuten Röntgenstrahlung?

Lösung:

a) $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0\, c}(1 - \cos\delta) = 10^{-10}\ m + 2{,}424 \cdot 10^{-12}\ m\ (1 - 0) = 102\ pm$

b) $W_k = W - W' = h(f - f') = h\, c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 4{,}6 \cdot 10^{-17}\ J \approx 300\, eV$

c)Im rechtwinkligen Impulsdreieck gilt:

$$\tan\delta = \frac{p'}{p} = \frac{p/\lambda'}{p/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda'} = 0{,}976 \Rightarrow \delta = 44{,}3^o$$

10.Aufgabe: Gammaquanten mit der Energie 1 MeV werden an einem freien Elektron gestreut. Die Wellenlänge der Streustrahlung ist gleich der Compton-Wellenlänge. Unter welchem Winkel werden die Gammaquanten gestreut?

Lösung:

Die Wellenlänge der Primärstrahlung wird mit λP, die Wellenlänge der Compton-Streustrahlung wird mit λS, die Compton-Wellenlänge des Elektrons wird mit λC bezeichnet

Aus $\lambda_S - \lambda_P = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\delta)$ und $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ mit $\lambda_S = \lambda_C$ folgt

$$\lambda_P = \frac{h}{m_e c} \cdot \cos\delta \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = \frac{m_e c \lambda}{h} = \frac{m_e c^2}{h f} = 0{,}512 \Rightarrow \delta = 59{,}2^0$$

11.Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe des Energie- und Impulserhaltungssatzes, dass beim Compton-Stoß das freie Elektron nicht die gesamte Photonenenergie aufnehmen kann. Berechnen Sie dazu relativistisch (v/c) nach dem Stoß!

Lösung:

Unter der Voraussetzung, dass das frei Elektron Energie und Impuls des Photons vollständig übernimmt, gilt:

1.Energieerhaltungssatz: $$h f_{Photon} = c^2 \left(\frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_e \right) \quad (1)$$

2.Impulserhaltungssatz: $$\frac{h f_{Photon}}{c} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v \quad (2)$$

Dividiert man die Gleichung (1) durch c, so kann man anschließend die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleichsetzten:

$$c\left(\frac{m_e}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_e\right) = \frac{m_e}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v \Rightarrow$$

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 - \frac{v}{c} \Rightarrow$$

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow v = 0 \; oder \; v = c$$

Keine dieser Fälle ist möglich.

12.Aufgabe: Ein Photon der Wellenlänge λ stoße mit einem ruhenden freien Elektron zusammen. Das Photon werde in Rückwärtsstreuung gestreut (Streuwinkel = 180°) und habe danach die Wellenlänge λ'.
a) Wie groß ist der Impuls des Elektrons nach dem Stoß als Funktion von λ und λ'?
b) Wie groß ist die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß? Rechnen Sie relativistisch und geben Sie das Resultat als Funktion von λ und λ' an.

13.Aufgabe: Ein Photon der Energie $W >> m_e c^2$ werde von einem ruhenden Elektron zurückgestreut. Wie groß ist die Energie des Photons in MeV nach der Rückstreuung?

14.Aufgabe: Ein Photon der Energie $W >> M_p c^2$ wurde von einem ruhenden Proton zurückgestreut. Wie groß ist die Energie des Photons in MeV nach der Rückstreuung?

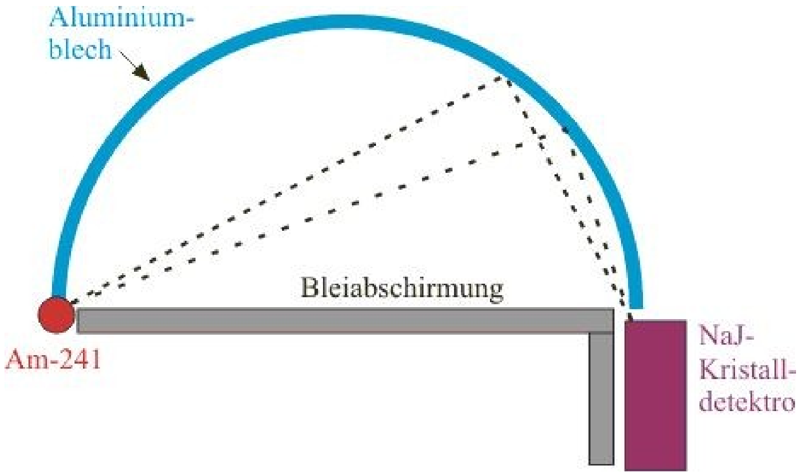
15.Aufgabe: Bei einem Compton-Streuprozess werde ein Photon mit einer Energie von 100 keV gestreut. Der Streuwinkel betrage 90°.
a) Wie groß ist die Energie des Photons nach dem Streuvorgang?
b) Wie groß ist die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß?
c) In welche Richtung fliegt das Rückstoßelektron?

16.Aufgabe: Bei einem Compton-Streuprozess werde die Energie des einlaufenden Photons mit W_o bezeichnet. Beweisen Sie, daß für die kinetische Energie W_{kin} des Rückstoßelektrons gilt:

$$W_{kin} = \frac{(1 - \cos\varphi)\, W_o}{1 - \cos\varphi + m\, c2 / W_o}.$$

17.Aufgabe: Bei einem Compton-Streuprozess sei φ der Winkel zwischen den einlaufenden Photon und dem Rückstoßelektron. Geben Sie φ als Funktion von λ und λ' an.

18.Aufgabe: Für einen Versuch zum Compton-Effekt wird als Strahlungsquelle das Americium-Isotop ^{241}Am verwendet, das γ-Quanten der Energie E_γ = 59,5keV emittiert. Die Americium-Quelle und ein NaJ-Kristalldetektor, mit dem auftreffende Strahlung energieaufgelöst nachgewiesen werden kann, sind an den Enden eines halbkreisförmigen Aluminiumblechs angebracht, das als Streumaterial dient. Eine Bleiabschirmung verhindert die direkte Bestrahlung des Detektors.



a)Sowohl beim Photo- als auch beim Compton-Effekt wechselwirken Photonen mit Elektronen. Erläutern Sie die beiden Effekte und zeigen Sie Unterschiede auf. Gehen Sie auch auf die energetischen Unterschiede von Photo- bzw. Compton-Elektronen ein.
Es werden im Folgenden nur einfach gestreute Quanten betrachtet.
b)Im Detektor werden durch Compton-Effekt gestreute Photonen der Energie E'_γ nachgewiesen. Begründen Sie, dass alle am Aluminiumblech Compton-gestreuten und im Detektor registrierten Photonen die gleiche Energie E'_γ besitzen. Berechnen Sie die Energie E'_γ. [zur Kontrolle: E'_γ = 53,3keV]
c)Fertigen Sie ein Impulsdiagramm für den Fall, dass das gestreute Photon im Detektor nachgewiesen wird und ermitteln Sie, unter welchem Winkel zur Einfallsrichtung des Photons das Compton-Elektron emittiert wird. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dann ein Compton-Elektron?
d)Der Detektor reagiert nicht nur auf Photonen. sondern auch auf eintreffende Elektronen. Warum können keine Elektronen in den Detektor gelangen, die durch Compton-Effekt ausgelöst wurden? Beantworten Sie die Frage mit Hilfe eines Impulsdiagramms.
e) Im Detektor werden auch Photonen der K_α-Linie von Aluminium nachgewiesen. Berechnen Sie die zugehörige Energie und erklären Sie, wie diese Strahlung zustande kommt.

Lösung:

a) Beim Photoeffekt löst ein Photon ein Elektron aus einer Fotokathode oder aus einem Atom aus. Nach der Wechselwirkung existiert kein Photon mehr, das Elektron besitzt eine definierte Energie (die Photonenenergie abzüglich der Ablösearbeit).
Beim Compton-Effekt trifft ein primäres Photon auf ein quasifreies Elektron. Nach der Wechselwirkung existiert neben dem Elektron noch ein Photon. Die Energieverteilung zwischen gestreutem Photon und Elektron hängt vom Streuwinkel ab.

b)Alle am Aluminiumblech Compton-gestreuten Photonen werden unter dem gleichen Winkel ϑ= 90° (Thaleskreis) gestreut. Sie haben also alle die gleiche Energie $E'\gamma$.

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\varphi) \xrightarrow{\varphi = 90^o} \Delta\lambda = \lambda_c$$

$$E_\gamma^{'} = \frac{h\cdot c}{\lambda'} \Rightarrow E_\gamma^{'} = \frac{h\cdot c}{\lambda + \lambda_c} \quad (1)$$

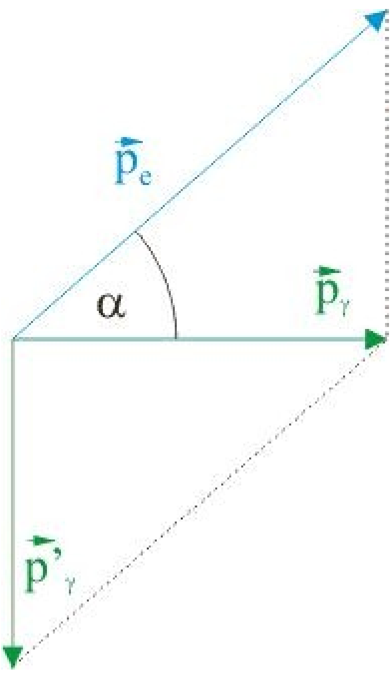
$$E_\gamma = \frac{h\cdot c}{\lambda'} \Rightarrow \lambda = \frac{h\cdot c}{E_\gamma} \quad (2)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_{0,e}\cdot c} \Big| \cdot c \Rightarrow \lambda_c = \frac{h\cdot c}{m_{0,e}\cdot c^2} \Rightarrow \lambda_c = \frac{h\cdot c}{E_{0,e}} \quad (3)$$

$$(3) \ und \ (2) \ in \ (1): E_\gamma^{'} = \frac{h\cdot c}{\frac{h\cdot c}{E_\gamma} + \frac{h\cdot c}{E_{0,e}}} \Rightarrow E_\gamma^{'} = \frac{1}{\frac{1}{E_\gamma} + \frac{1}{E_{0,e}}} \Big| \cdot E_\gamma \cdot E_{0,e}$$

$$E_\gamma^{'} = \frac{E_\lambda \cdot E_{0,e}}{E_{0,e} + E_\lambda} = \frac{59{,}5\cdot 511}{511 + 59{,}5} keV = 53{,}3 \ keV$$

c)Berechnung der Impulse für die maßstabsgetreue Zeichnung:



$$p_\gamma^{'} = \frac{E_\gamma^{'}}{c} = \frac{53{,}3\cdot 10^3 \cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}}{3{,}00\cdot 10^8} Ns \approx 2{,}8\cdot 10^{-23} \ Ns$$

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{59{,}5\cdot 10^3 \cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}}{3{,}00\cdot 10^8} Ns \approx 3{,}2\cdot 10^{-23} \ Ns$$

Berechnung des Streuwinkels α für das Elektron:

$$\tan\alpha = \frac{p_\gamma^{'}}{p_\gamma} = \frac{E_\lambda^{'}}{E_\gamma} = \frac{53{,}3}{59{,}5} = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 42^o$$

Berechnung der Geschwindigkeit des Elektrons:

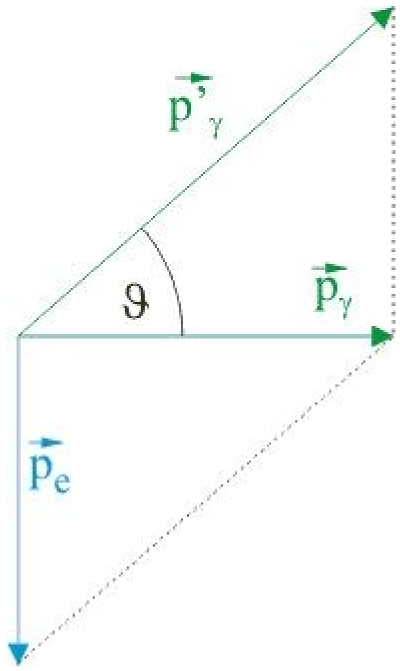
$$E_{kin,e} = E_\gamma - E_\gamma^{'} = 59{,}5 \ keV - 53{,}3 \ keV = 6{,}2 \ keV$$

$$E_{kin,e} = E_e - E_{0,e} = \frac{E_{0,e}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - E_{0,e} = E_{0,e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$1 + \frac{E_{kin,e}}{E_{0,e}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{E_{kin.e}}{E_{0,e}}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{E_{kin,e}}{E_{0,e}}}\right)^3} \Rightarrow$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{6{,}2}{511}}\right)^3} = 0{,}15 \Rightarrow v = 0{,}15\cdot c$$

d) Würde ein Compton-Elektron in den Detektor treffen, dann müsste p_e senkrecht zu p_γ sein. Im Impulsdiagramm müsste dann $p'_\gamma > p_\gamma$ sein, was energetisch nicht möglich ist.



e)Gesetz von Moseley:

$$\frac{1}{\lambda_{K,\alpha}} = \frac{3}{4} R\,(Z - 1)^2$$

Berechnung der Energie von K_α-Photonen:

$$\frac{1}{\lambda_{K,\alpha}} = \frac{3}{4} R\,(Z - 1)^2 \,\Big|\cdot h\cdot c \;\Rightarrow\; \frac{h\cdot c}{\lambda_{K,\alpha}} = \frac{3}{4} R\cdot h\cdot c\,(Z - 1)^2 \;\Rightarrow$$

$$E_{K,\alpha} = 0{,}75\cdot 1{,}097\cdot 10^{7}\cdot 4{,}14\cdot 10^{-15}\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}\cdot (13 - 1)^2\ eV \approx 1{,}47\cdot 10^{3}\ eV$$

19.Aufgabe: Comptoneffekt und Rückstoßelektron

Bestrahlt man eine Graphitprobe mit Röntgenlicht, so tritt u. a. Compton-Streuung auf.

a)Erklären Sie den Compton-Effekt mit einer Modellvorstellung. Warum ist der Compton-Effekt bei Verwendung weicher Röntgenstrahlung nur schwer nachzuweisen?
b) Geben Sie eine Möglichkeit zur Messung der Wellenlänge harter monochromatischer Röntgenstrahlung an.

Für die weiteren Teilaufgaben sei die Energie der eingestrahlten Photonen gleich der Ruheenergie eines Elektrons. Die Streustrahlung unter dem Winkel $\varphi = 120°$ wird untersucht.

c)Stellen Sie für diesen Fall die Wellenlänge λ' und den Impulsbetrag p' der gestreuten Photonen als Vielfache von entsprechenden Größen der einfallenden Strahlung dar.[zur Kontrolle: $\lambda' = 2{,}5\cdot\lambda$]

d)Zeichnen Sie das Impulsvektordiagramm. Wählen Sie 5 cm für die Länge des Impulsvektors der Primärstrahlung.

e) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Rückstoßelektrons als Vielfaches der Ruheenergie eines Elektrons. [zur Kontrolle: $W_{kin} = 0{,}60 \cdot m_0c^2$]

f) Berechnen Sie relativistisch die Geschwindigkeit des Rückstoßelektrons.

Lösung:

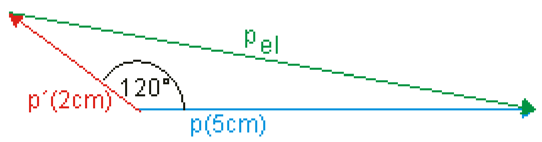
a) Man erklärt sich den Compton-Eeffekt als vollelastischen Stoß zwischen einem Photon und einem freien Elektron. Dabei gilt der Energiesatz und der vektorielle Impulssatz. Die maximale Wellenlängenänderung beim Compton-Eeffekt ist $2 \cdot \lambda_c = 4{,}8 \cdot 10^{-12}$ m. Dies ist gegenüber der Wellenlänge von weichem Röntgenlicht, die bei 10^{-10}m liegt, so klein, dass man den Unterschied kaum messen kann.

b) Die Wellenlänge harten Röntgenlichts misst man mit der Braggschen Drehkristallmethode bei bekanntem Netzebenenabstand.

c)

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos 120°) = 1{,}5 \cdot \lambda_c \Rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 2{,}5 \cdot \lambda, \text{ da } \lambda = \lambda_c$$

d)



e)

$$E_{kin} = E_{Ph} - E'_{Ph} = \frac{h \cdot c}{\lambda_c} - \frac{h \cdot c}{2{,}5\lambda_c} = 0{,}6 E_{0;El}$$

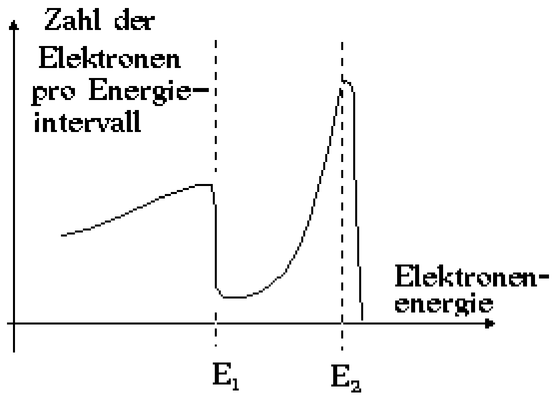
f)

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{1{,}6 \cdot E_0}\right)^2} = 0{,}78 \Rightarrow v = 0{,}78\,c$$

20.Aufgabe: **Vergleich von Compton- und Photoeffekt**

a) Erklären Sie kurz die wesentlichen Vorgänge beim Compton-Effekt und stellen Sie dabei besonders die Unterschiede zum Fotoeffekt heraus.

Ein leichtes Element wird mit kurzwelliger elektromagnetischer Strahlung der Quantenenergie 335 keV bestrahlt. Das nebenstehende Bild zeigt das Energiespektrum der dabei emittierten Elektronen.



b)Erklären Sie, wie die beiden Maxima bei den Energiewerten E_1 und E_2 entstanden sind.

c) Berechnen Sie den Wert von E_1.

Lösung

a) Beim Compton-Effekt führt ein Photon einen vollelastischen Stoß mit einem quasifreien Elektron durch. Dabei gibt es einen Teil seiner Energie an das Elektron ab. Das gestreute Photon hat nach dem Stoß eine geringere Energie und damit auch geringere Frequenz als vor dem Stoß.
Beim Fotoeffekt gibt ein Photon seine ganze Energie an ein Elektron ab und vernichtet sich dabei selbst. Dabei muss ein dritter Stoßpartner (meist ein Atomkern) vorhanden sein, da sonst der Impulssatz verletzt wäre.

b)Das Intensitätsmaximum mit der Energie E_2 stammt von Elektronen, die beim Fotoeffekt entstanden sind. Die Photonen haben dabei ihre gesamte Energie von 335 keV an das Elektron übertragen. Die Elektronen mit Energien von E_1 und weniger stammen aus Comptonstreuprozessen, wobei die Elektronen mit der größten Energie E_1 einen zentralen Stoß mit dem Photon durchgeführt haben, so dass das Photon um 180° gestreut wurde.

c)

Comptonformel lautet $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1-\cos\delta)$ Hier $\delta = 180^0 \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_C \cdot 2$

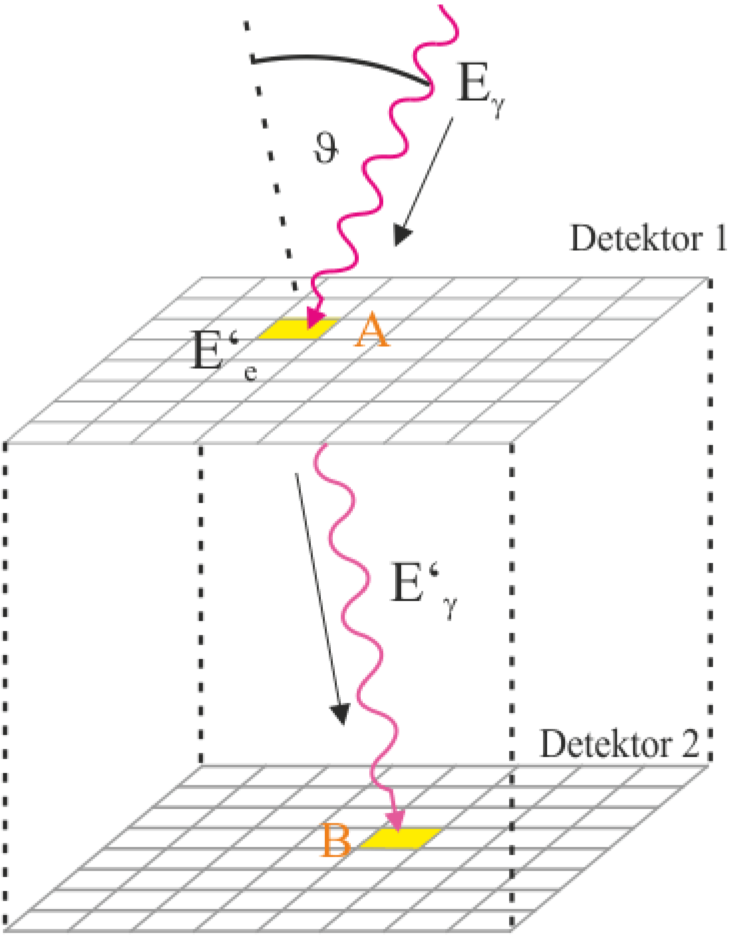
$$\lambda = \frac{h\cdot c}{E} \Rightarrow \lambda = \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 3{,}0\cdot 10^{8}\,ms^{-1}}{335\cdot 10^{3}\,V\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,As} \Rightarrow \lambda = 3{,}71\cdot 10^{-12}\,m$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda \text{ mit } \Delta\lambda = 2\cdot 2{,}42\cdot 10^{-12}\,m \Rightarrow \lambda' = 8{,}55\cdot 10^{-12}\,m \Rightarrow$$

$$E' = \frac{h\cdot c}{\lambda'} \Rightarrow E' = \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 3{,}0\cdot 10^{8}\,ms^{-1}}{8{,}55\cdot 10^{-12}\,m} = 2{,}32\cdot 10^{-14}\,J = 145\text{ keV} \Rightarrow$$

$$E_e = E - E' = 335\text{ keV} - 145\text{keV} = 190\text{ keV}$$

21.Aufgabe: Compton-Teleskop



Das Compton-Teleskop dient zur Beobachtung von astronomischen Objekten, die Gammastrahlung mit Quantenenergien in der Größenordnung einiger MeV aussenden. In diesem Energiebereich ist der Compton-Effekt der dominierende Wechselwirkungsprozess von Photonen mit Materie.

a)Begründen Sie, warum der Compton-Effekt bei sichtbarem Licht nicht beobachtet werden kann.

Nebenstehend ist das Prinzip eines Compton-Teleskops skizziert. Ein einfallendes γ-Quant der Energie $E_γ$ wird in Detektor 1 durch Compton-Streuung an einem Elektron um den Winkel φabgelenkt. Dabei wird die kinetische Energie E_e' des Comptonelektrons gemessen. Das gestreute γ-Quant wird in Detektor 2 schließlich vollständig absorbiert, wobei seine Energie $E_γ'$ gemessen wird. Damit erhält man $E_γ$ aus $E_γ = E_e' + E_γ'$. Beide Detektoren sind ortsauflösend, d. h. die Wechselwirkungsorte A und B sind bekannt.

b) Leiten Sie aus der Formel $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos \varphi)$ für die Wellenlängenänderung beim Compton-Effekt her, dass der Streuwinkel φaus den Messgrößen E_e' und $E_γ'$ sowie aus der Ruhemasse m_0 des Elektrons nach folgender Beziehung berechnet werden kann (8 BE):

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{m_0 \cdot c^2}{E_\gamma'} + \frac{m_0 \cdot c^2}{E_e' + E_\gamma'}$$

c) Ein γ-Quant löst in Detektor 1 ein Comptonelektron der kinetischen Energie E_e' = 0,70MeV aus; in Detektor 2 wird die Energie $E_γ'$ = 1,3MeV des gestreuten γ-Quants gemessen. Berechnen Sie daraus den Streuwinkel φ des Photons sowie die Geschwindigkeit des Comptonelektrons.

d) Im Compton-Teleskop wird die Zeitdauer Δt zwischen den Wechselwirkungsprozessen in den beiden Detektoren gemessen. Berechnen Sie, innerhalb welcher Grenzen Δt liegen muss, damit zwei beobachtete Wechselwirkungen im oberen und im unteren Detektor tatsächlich vom selben γ-Quant stammen können. Betrachten Sie dazu die beiden Detektoren als gegenüberliegende Flächen eines Würfels mit der Kantenlänge 1,2m.

e) Erläutern Sie anhand einer Skizze, warum man bei Detektion eines einzelnen γ-Quants mit anschließender Bestimmung von φ noch nicht die Richtung der γ-Quelle kennt. Erklären Sie, warum man durch Detektion mehrerer aufeinander folgender γ-Quanten die Position der γ-Quelle dennoch mit einem einzelnen Compton-Teleskop bestimmen kann.

Lösung

a) Für die Wellenlängenänderung beim Compton-Effekt gilt:

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{h}{m_{o,e} \cdot c} \cdot (1 - \cos\vartheta) \quad (1)$$

Die maximale Wellenlängenverschiebung beim Compton-Effekt ist für φ = 180° erreicht und beträgt: $\Delta\lambda_{max} = 2 \cdot \lambda_c = 2 \cdot 2{,}42 \cdot 10^{-12}\text{m} = 4{,}84 \cdot 10^{-12}\text{m}$

Das sichtbare Licht liegt in einem Wellenlängenbereich von $700000 \cdot 10^{-12}$ m bis $400000 \cdot 10^{-12}$m, so dass die kleine Wellenlängenänderung durch einen Compton-Effekt wohl nicht feststellbar sein dürfte.

b) Für die Wellenlängenänderung der γ-Strahlung gilt:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{h \cdot c}{E_\gamma'} - \frac{h \cdot c}{E_\gamma} \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt:

$$\frac{h \cdot c}{E_\gamma'} - \frac{h \cdot c}{E_\gamma} = \frac{h}{m_{o,e} \cdot c} \cdot (1 - \cos\vartheta) \,\Big|\, \cdot \frac{m_{o,e} \cdot c}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_{0,e} \cdot c^2}{E_\gamma'} - \frac{m_{0,e} \cdot c^2}{E_\gamma} = 1 - \cos\vartheta$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{m_{0,e} \cdot c^2}{E_\gamma'} + \frac{m_{0,e} \cdot c^2}{E_\gamma}$$

c) Berechnung des Streuwinkels:

$$E_\gamma = E_\gamma' + E_{kin,el}' \quad \Rightarrow \quad E_\gamma = 1{,}3\,\text{MeV} + 0{,}70\,\text{MeV} = 2{,}0\,\text{MeV}$$

Eingesetzt in die Beziehung für cosφ von Teilaufgabe b ergibt sich:

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{0{,}511}{1{,}3} + \frac{0{,}511}{2{,}0} \approx 0{,}86 \quad \Rightarrow \quad \vartheta \approx 30°$$

Für die Gesamtenergie des Compton-Elektrons nach dem Stoß gilt:

$$E_{ges,el}' = E_{0,el} + E_{kin,el}' \quad \Rightarrow \quad E_{ges,el}' = 0{,}511\,\text{MeV} + 0{,}70\,\text{MeV} \approx 1{,}21\,\text{MeV}$$

Für die Geschwindigkeit gilt dann:

$$E_{ges,el}' = \frac{E_{0,el}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{E_{0,el}}{E_{ges,el}'}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_{0,el}}{E_{ges,el}'}\right)^2}$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}511}{1{,}21}\right)^2} \approx 0{,}91 \cdot c$$

d) Die kürzeste Entfernung zwischen einem oberen und einem unteren Detektor ist die Würfelhöhe $\Delta x_{min} = 1{,}2\text{m}$.
Die größte Entfernung zwischen einem oberen und einem unteren Detektor ist die Länge der Raumdiagonale des Würfels $\Delta x_{max} = \sqrt{3} \cdot 1{,}2\text{m} \approx 2{,}1\text{m}$

Berechnung der zeitlichen Grenzen:

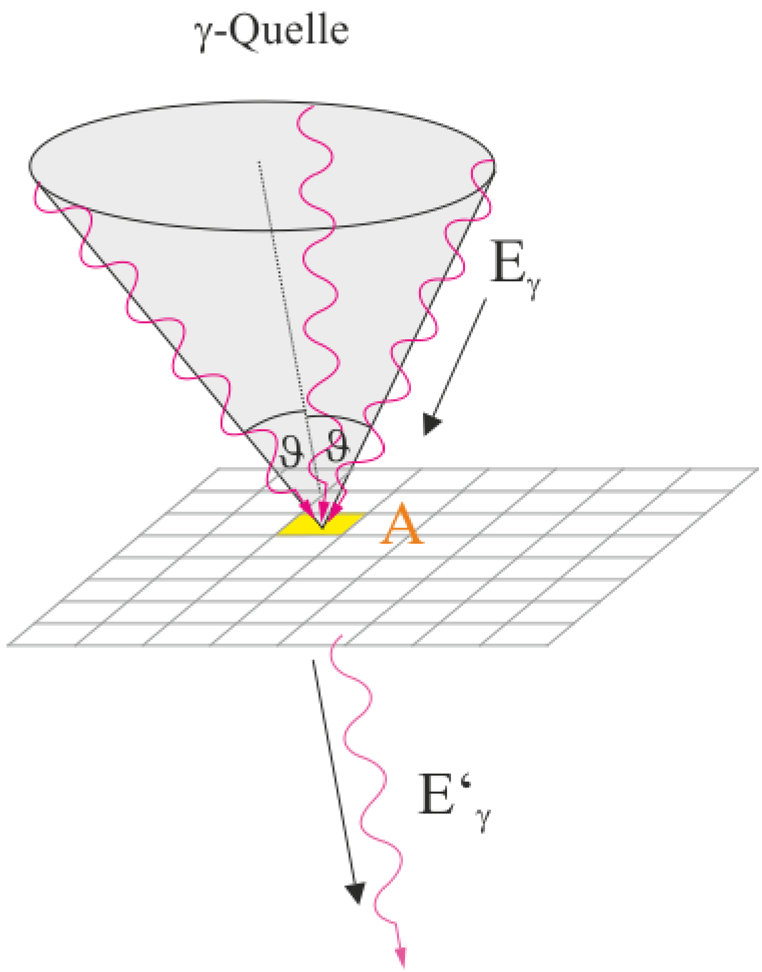
$$\Delta t_{min} = \frac{\Delta x_{min}}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{min} = \frac{1{,}2}{3{,}0 \cdot 10^8} \frac{m}{\frac{m}{s}} \approx 4{,}0\,ns$$

$$\Delta t_{max} = \frac{\Delta x_{max}}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{max} = \frac{2{,}078}{3{,}0 \cdot 10^8} \frac{m}{\frac{m}{s}} \approx 6{,}9\,ns$$

Wenn der Detektor B frühestens nach 4,0 ns und spätestens nach 6,9 ns nach dem ersten Detektor ein Signal gibt, können die Signale von einem γ-Quant stammen.

e) Die γ-Quelle kann nach der Registrierung eines γ-Quants in der oberen Ebene bei A (und in der unteren Ebene bei B) auf einem Kegelmantel mit Spitze bei A und dem Öffnungswinkel 2·φ liegen.

Die Position der γ-Quelle wird dadurch bestimmt, dass die zu verschiedenen γ-Quanten gehörenden Kegelmäntel überlagert werden. So entstehen Kreislinien als Projektionen auf der Himmelssphäre, die sich alle in einem Punkt schneiden. In Richtung dieses Punktes liegt die γ-Quelle.



22.Aufgabe: An freien Elektronen wird Röntgen-Strahlung durch den Compton-Effekt gestreut.

a)Die Streustrahlung wird unter dem Winkel $\vartheta_1 = 90°$ beobachtet; die prozentuale Wellenlängenänderung beträgt 15%. Wie groß ist die Wellenlänge λ_P der Primärstrahlung?
b)Wie groß ist die prozentuale Wellenlängenänderung bei gleicher Primärstrahlung wie unter a), wenn die Streustrahlung unter dem Winkel $\vartheta_2 = 60°$ beobachtet wird?

Lösung

a)Die Wellenlänge der Compton-Streustrahlung wird mit λ_s bezeichnet. Es gilt:

$$\lambda_S - \lambda_P = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\delta)$$

$$\delta_1 = 90^o \; und \; \frac{\lambda_{S,1} - \lambda_P}{\lambda_P} = 15\% = 0{,}15 \Rightarrow$$

Mit

$$0{,}15\,\lambda_P = \frac{h}{m_e\,c} \quad \Rightarrow \quad \lambda_P = \frac{h}{0{,}15\,m_e\,c} = 1{,}62 \cdot 10^{-11}\,m$$

b)Die prozentuale Wellenlängenänderung beträgt: